

การกวัดแกว่งอย่างง่าย (Simple Harmonic Oscillator)

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion)

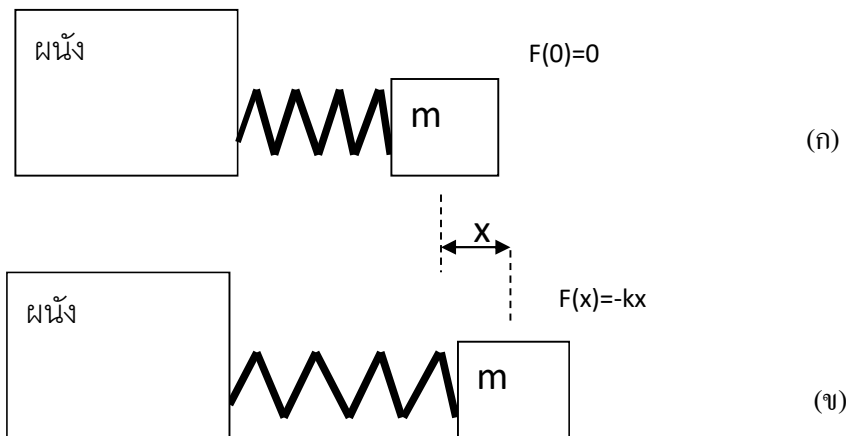
การเคลื่อนที่แบบ SHM เป็นการเคลื่อนที่ที่กลับไปกลับมารอบจุดสมดุล จึงจะขอกำหนดถึงจุดสมดุลของการเคลื่อนที่แบบนี้อยู่ก่อนในเบื้องต้น ซึ่งที่จุดสมดุลหนึ่งของการเคลื่อนที่นี้ต้องเป็นไปตามสมการ $\sum \vec{F}(0) = 0$ ซึ่งเป็นสมการที่ใช้อธิบายระบบภายใต้ภาวะสมดุล ที่อยู่ในภาวะเคลื่อนที่พิจารณาตัวอย่างการเคลื่อนที่ของมวลที่ปลายสปริงบนพื้นไม่มีแรงเสียดทานดังรูป จะพบว่าผลรวมของแรงเป็นไปตามสมการ

$$F(x) = -kx$$

$$ma = -kx$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = 0$$



รูปตัวอย่างการเคลื่อนที่ของมวลที่ปลายสปริงบนพื้นไม่มีแรงเสียดทาน(ก)ที่ตำแหน่งสมดุล (ข)ที่ตำแหน่ง +x

สมการที่ได้ข้างต้นนี้เป็นรูปแบบสมการอนุพันธ์ที่มีคำตอบสมการเป็นฟังก์ชันดังนี้

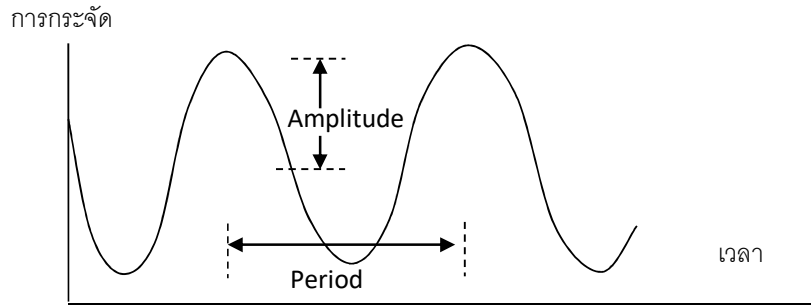
$$x = A \sin(\omega t + \phi_0)$$

เมื่อ A และ ϕ_0 เป็นค่าคงตัวที่สามารถตรวจสอบค่าได้จากเงื่อนไขขอบเขตเริ่มต้น

มุม ϕ_0 เป็นมุมเฟสเริ่มต้นค่าใดๆ ค่าตอบสมการที่กล่าวถึงข้างต้นสอดคล้องกันกับสมการ

$$x = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

ซึ่งเป็นรูปแบบทั่วไปของฟังก์ชันคลื่นไซน์ ไซโคสที่มิกกราฟดังรูป



รูปแสดงกราฟของฟังก์ชันคลื่นทั่วไปแบบที่มีคาบเวลาและแอมพลิจูดคงตัวตลอดเวลา

เพื่อแสดงให้เห็นจริงว่าสมการนี้เป็นคำตอบของสมการอนุพันธ์จึงต้องหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาสองครั้งดังนี้

หาอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งได้ $\frac{dx}{dt} = \omega(A\cos(\omega t) - B\sin(\omega t))$

หาอนุพันธ์ลำดับที่สองได้ $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t))$

ซึ่งจะพบว่าพจน์ในวงเล็บเป็นฟังก์ชัน x ดังนั้นจะได้ $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ แสดงว่าสมมติฐานนี้เป็นจริง

มีค่าคงที่สองตัวที่ต้องตรวจสอบหาค่าได้จากเงื่อนไขเริ่มต้นคือ A และ B

จากสมการที่ได้อาจเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

ซึ่งพบว่า $\omega^2 = \frac{k}{m}$ สมการสอดคล้องกับ Simple Harmonic Motion (SHM)

ดังนั้น อาจเขียนรูปแบบทั่วไปของ SHM ได้ดังนี้

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

หรือ $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$

จากความสัมพันธ์ของความถี่ ความถี่เชิงมุม และคาบเวลา ดังสมการ

$$\omega = 2\pi\nu$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\nu = \frac{1}{T}$$

คำตอบสมการ SHM อาจเขียนได้ในรูปปริมาณเชิงซ้อนดังนี้

$$\tilde{x} = A\cos(\omega t + \phi_0) + iA\sin(\omega t + \phi_0)$$

เมื่อใช้ Taylor's expansions of sine and cosine ดังนี้

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \dots$$

ดังนั้น

$$\cos\theta + i\sin\theta = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} \dots$$

$$\cos\theta + i\sin\theta = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} \dots$$

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

หรืออาจเขียนได้จาก

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$dz = (-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta = izd\theta$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int id\theta$$

$$\ln z = i\theta$$

$$z = e^{i\theta}$$

ดังนั้นจึงอาจเขียนสมการ $\tilde{x} = A\cos(\omega t + \phi_0) + iA\sin(\omega t + \phi_0)$ เป็นอีกรูปแบบหนึ่งได้ดังนี้

$$\tilde{x} = Ae^{i(\omega t + \phi_0)}$$

ซึ่งสามารถตรวจสอบได้ดังนี้

จากสมการ

$$\tilde{x} = Ae^{i(\omega t + \phi_0)}$$

$$\dot{\tilde{x}} = i\omega Ae^{i(\omega t + \phi_0)}$$

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} = (i\omega)^2 Ae^{i(\omega t + \phi_0)}$$

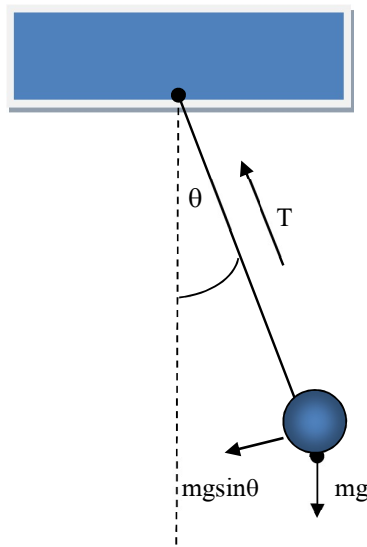
$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} = -\omega^2 \tilde{x}$$

ปริมาณเชิงซ้อนมีใช้มากในหลายสาขาฟิสิกส์ ระบบในทางฟิสิกส์มักสนใจเพียงส่วนจริง

ของปริมาณเชิงซ้อนคือ

$$x = \text{Re}[Ae^{i(\omega t + \phi_0)}]$$

ตุ้มนาฬิกาอย่างง่าย(The Simple Pendulum)



รูป แสดงการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกของตุ้มนาฬิกาอย่างง่ายที่แขวนด้วยเชือกยาว l

จากรูปแสดงตุ้มนาฬิกาอย่างง่ายซึ่งประกอบด้วยมวล m ผูกเชือกยาว l คึงออกจากแนว
สมคูลให้เชือกทำมุมกับแนวดิ่งเป็นมุม θ น้อยๆ แล้วปล่อยให้แกว่งกลับไปกลับมา ในภาวะที่เชือก
ทำมุมกับแนวดิ่งเป็นมุม θ มีแรงตึงเชือกเท่ากับ

$$T = mg\cos\theta$$

จึงมีแรงดึงกลับในแนวดิ่งจากกับแรงตึงในเส้นเชือกเท่ากับ

$$F = -mg\sin\theta$$

แต่เนื่องจาก θ เป็นมุมน้อยๆ ดังนั้นจึงประมาณ $\sin\theta \approx \theta$

และจึงได้ค่าของ $x \cong l\sin\theta \approx l\theta$

และสามารถเขียนแสดงปริมาณของแรงดึงกลับได้ใหม่ดังนี้

$$F = ma = m\ddot{x} = -mg\sin\theta$$

$$F = -mg\frac{x}{l}$$

$$F \approx -mg\theta$$

$$\text{หรือ } m\frac{d^2x}{dt^2} + mg\frac{x}{l} = 0$$

รูปแบบสมการอนุพันธ์เป็นแบบ SHM ที่มี $\omega^2 = \frac{g}{l}$ หรือ $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

The Compound Pendulum

เป็นตุ้มนาฬิกาอีกรูปแบบหนึ่งที่ต่างออกไป ตัวอย่างเช่นการส่วนของรูปทรงวัตถุเป็นตัว
แกว่งกวัดภายใต้การเคลื่อนที่แบบ SHM โดยการแขวนวัตถุมวล m ที่จุดหมุนซึ่งห่างออกไปจากจุด
ศูนย์กลางมวลของวัตถุนั้นเป็นระยะ l และใช้แรงดึงกลับตรงจุดศูนย์กลางมวลสร้างทอร์กเมื่อคึงให้
บิดไปเป็นมุม θ กับแนวดิ่งดังรูปที่ 1.5 เมื่อปล่อยให้แกว่งรอบจุดหมุนจะเกิดโมเมนต์ความเฉื่อย
รอบจุดหมุน I ถ้ากำหนดให้ทอร์กรอบจุดหมุนเท่ากับ $\tau = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

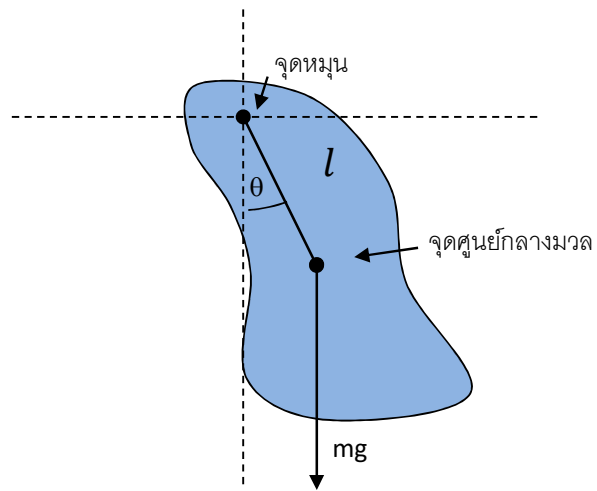
ซึ่งขนาดของทอร์กคือ $\tau = rF\sin\theta = lmg\sin\theta$

เนื่องจาก

$$\tau = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta \approx -mg\theta$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{lmg}{I}\theta = 0$$

ซึ่งได้ผลลัพธ์เป็น SHM ที่มี $\omega^2 = \frac{lmg}{I}$



รูปแสดงการกวัดแกว่งในรูปแบบซิมเปิลฮาร์โมนิกโดยใช้โครงสร้างวัตถุแข็งเกร็ง

เหมือนกันกับกรณีของตุ้มนาฬิกาอย่างง่ายจึงอาจประยุกต์สมการนี้ใช้ได้กับตุ้มนาฬิกาอย่างง่ายได้ด้วย โดยพิจารณาว่าจุดของมวลคือมวลของลูกบอล และมีโมเมนต์ความเฉื่อยคือ $I = ml^2$

เหมือนกัน ดังนั้นจึงได้ $\omega^2 = \frac{mgl}{ml^2} = \frac{g}{l}$

ซึ่งคำตอบสมการคือ $\theta = Ae^{i(\omega t + \phi_0)}$ เนื่องจากเชิงมุมและเชิงเส้นแปลงเปลี่ยนกันได้ตลอด

ดังนั้นสมการในเชิงเส้นจะเขียนได้คือ $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{lmg}{I}\theta = 0$ ซึ่งได้ผลลัพธ์เป็น SHM ที่มี

$$\omega^2 = \frac{lmg}{I}$$

การกวัดแกว่งแบบหน่วง

พิจารณาฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ที่มีผลจากความเสียดทาน ซึ่งแปรตามความเร็ว V ดัง

สมการ

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - bv \quad \text{หรือ} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx$$

เมื่อ $b \frac{dx}{dt}$ เป็นพจน์ของความเสียดทาน จัดรูปใหม่ได้ $m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$

$$\text{หรือ} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\text{แทน } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ และ } \gamma = \frac{b}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad \dots\dots\dots(1.20)$$

คำตอบสมการได้ในรูป f^n ของ t ดังสมการ

$$x = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i(\omega t + \alpha)} \quad (\text{ตัดการพิสูจน์ออกไป})$$

$$\text{เมื่อ } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

Forced Oscillator ลองพิจารณาการสั่นที่ถูกแรงภายนอกกระทำ ดังสมการ

$$m\ddot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

คำตอบสมการ

$$x = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i(\omega t + \alpha)} \quad \text{เมื่อ } \alpha = 0, \pi, \dots$$

การบ้าน

1. มวลที่ปลายสปริง 100 g ผูกติดปลายสปริงงหาอัตราเร็วเชิงมุม เมื่อค่านิจสปริง 20 N/m
2. จงหาอัตราเร็วเชิงมุมของตุ้มนาฬิกาอย่างง่ายเมื่อผูกมวล 100 กรัมด้วยเชือกยาว 100 cm
3. จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยจากการแกว่งแท่งไม้มวล 100 กรัม แขนงที่จุดหมุนห่างจุดศูนย์กลางมวล 10 cm และโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล $I_{cm} = 1 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$

เฉลยการบ้าน

$$1. \text{ วิธีทำ } \omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{20N/m}{0.1kg} = 200 \frac{1}{s^2} \quad \text{ดังนั้น } \omega = 10\sqrt{2}rad/s$$

$$2. \text{ วิธีทำ } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{10m/s^2}{1m}} = \sqrt{10 \frac{1}{s^2}} = \sqrt{10}rad/s$$

$$3. \text{ วิธีทำ จาก } I = I_{cm} + ml^2 = 1 \times 10^{-3}kgm^2 + 0.1kg \times (0.1m)^2 = 2 \times 10^{-3}kgm^2$$

$$\omega^2 = \frac{mgl}{I} = \frac{0.1m \times 0.1kg \times 10m/s^2}{2 \times 10^{-3}kgm^2} = 25 \frac{1}{s^2} \quad \text{หรือ } \omega = 5rad/s$$

$$\text{จาก } \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{จะได้ } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6.28rad}{5rad/s} = 1.256 s$$